Matrices (Repaso de algunas propiedades)

Última edición: 09/11/2009

1. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es inversible si existe $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que $AB = BA = I$.
Cuando B existe, es única y la notamos: $B = A^{-1}$.
Para el cálculo de una matriz inversa podemos utilizar el *método de Gauss-Jordan.* Para ello se considera la matriz $(A|I_n)$ y se realizan aquellas operaciones elementales por filas que consigan transformar la matriz A en la matriz I_n, de esta forma la matriz I_n se habrá transformado en A^{-1}. Es decir, se han de realizar operaciones elementales por filas de forma que.

$$(A|I_n) \approx ... \approx (I_n|A^{-1})$$

Por ejemplo:
Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

De esta forma A$^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

1.1. Propiedades

- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$ (ver siguiente sección)

2. Determinante de una matriz

Se define el *determinante* de A como la suma de todos los productos elementales con signos tomados de A.
Notamos: $det(A) = |A| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} .....a_{nj_n}$
donde $(j_1, j_2, ..., j_n)$ es una permutación de $\{1, 2, ..., n\}$, y el signo + o - depende si la permutación $(j_1, j_2, ..., j_n)$ es respectivamente par o impar.

2.1. Desarrollo del determinante por cofactores

Desarrollo a lo largo de la j-ésima columna:
$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$

Desarrollo a lo largo de la i-éisma fila:
$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$

donde $C_{ij} = (-1)^{1+j}M_{ij}$ se lo llama *cofactor del elemento* a_{ij}. M_{ij} es el *menor del elemento* a_{ij} y se lo define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna.
Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y C_{ij} es el *cofactor del elemento* a_{ij} entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & ... & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & ... & C_{n2} \\ ... & ... & & ... \\ C_{1n} & C_{21} & ... & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como **matriz adjunta de** A**,** y se denota $adj(A)$

Ejemplos:
Si $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ tal que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Si $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que **A** = $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

$\implies$ adj(**A**) = $\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

2.2. Propiedades

• Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fina de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$
• Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$
• Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$
• Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, entonces $\det(A^T) = \det(A)$
• Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces: $\det(kA) = k^n \det(A)$; $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
• Si A es una matriz triangular de nxn, entonces $det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir: $det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$
• A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$
• Si A es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
• Si A es inversible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$

2.3. Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método de fácil memorización para calcular el determinante de una matriz 3×3.

Considérese la matriz de 3×3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Su determinante se puede calcular de la siguiente manera:

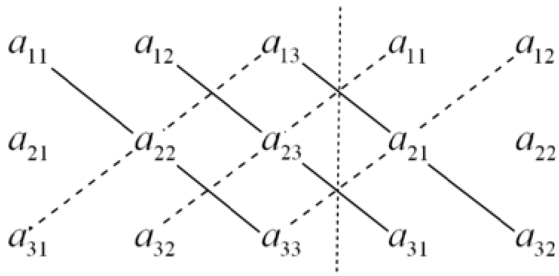

Figura 2.1: La regla de Sarrus: diagonales continuas y en trazos

En primer lugar, repetir las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la misma de manera que queden cinco columnas en fila. Después sumar los productos de las diagonales descendentes (en línea continua) y sustraer los productos de las diagonales ascendentes (en trazos)
Esto resulta en:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

3. Regla de Cramer

Si $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que $det(A) \neq 0$, entonces la única solución del sistema es $(x_1, x_2, ..., x_n)$ con:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ..., x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar la jésima columna de A por b.